BARYCENTRE

I) ACTIVITES

Activité 1 : Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de 500 g en A et de 350 g en B. M un point sur la barre. Déterminer la position de M sachant que le système et en équilibre.



Activité 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

2- Tracer le point G.

3- Si le plan est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)$ où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G.

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions : Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré. Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

l'application $f_2 : P \to V_2$ tel que :

$f_2(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ est une bijection et il existe un et un seul point G qui vérifie $f_2(G)=\vec{0}$

Définition : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré

tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

On écrit : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

et par suite : pour tout réel k non nul on a :

$k\alpha\overrightarrow{AG}+k\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

et donc $G = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété :

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

Construction :

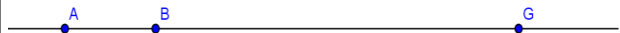
• **Exemple1 :** Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc : $4\overrightarrow{AG}-5\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{AG}+5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

Donc le point $G \in (AB)$



Exemple2 :

Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\sqrt{2}\right))\}$

donc : $G = Bar\{(A, 2); (B, -1)\}$

• Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ On a donc par suite :

$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

soit M est un pont quelconque dans le plan (P)

on a donc :

$\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MG}\right)+\beta\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MG}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

d'où : on conclut que : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Pour tout point M du plan (P) on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ou $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

Propriété : Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant A = M dans la propriété :

On aura : $\overrightarrow{AG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a :

$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{a+b} \end{cases}$$

Preuve : (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant A = O)

Exemples : 1)Dans le plan (P) rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$

Et soit $G = Bar$ $\{(A, 1); (B, -5)\}$

Solution : on a : $\begin{cases} x_G=\dfrac{-x_A+5x_B}{4} \\ y_G=\dfrac{-y_A+5y_B}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G=\dfrac{17}{4} \\ y_G=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Donc : $G\left(\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right)$

Exercice1 : soit ABC un triangle et soit :
I = Bar {(B, 4); (C, -3)}
Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Solution : on a : donc $(4+(-3))\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ $I(4;-3)$

Exercice2 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ et $E\notin(AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$

1)Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

solution : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}\Leftrightarrow\overrightarrow{EG}=2\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}\Leftrightarrow-1\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

$-\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) on a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G\in(EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G\in(AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit $G = Bar$ $\{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de G

2)Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

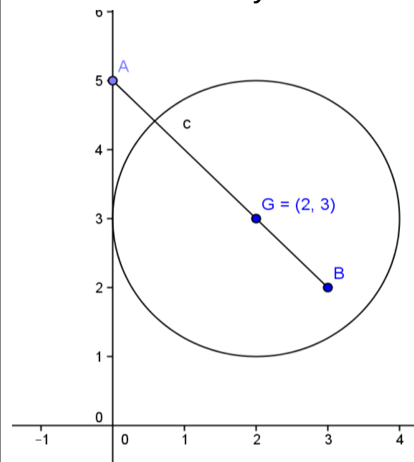
$(C)=\left\{M\in(P)/\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G=\dfrac{0+6}{3}=2 \\ y_G=\dfrac{5+4}{3}=3 \end{cases}$ donc $G(2;3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6cm\Leftrightarrow\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$

$\Leftrightarrow|3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6cm\Leftrightarrow 3MG=6cm\Leftrightarrow MG=2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=2cm$



3) Barycentre de trois points pondérés

Propriété :

Soit $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ l'application :

$f_3 : P\to V_2$ tel que : $f_3(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_3(G)=\vec{0}$

c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Preuve : f_3 est l'application de Leibniz pour trois points

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$
si M est un pont quelconque dans le plan (P)

on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

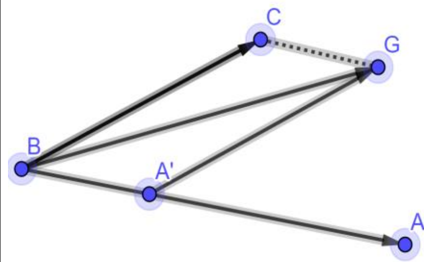
Preuve : Même démonstration que dans le cas précèdent.

Construction :

- **Exemple :**

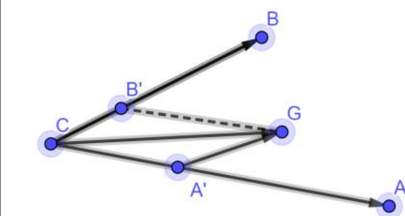
1°Construire $G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$
$G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(1+(-1)+3)\overrightarrow{MG} = 1\overrightarrow{MA} + (-1)\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$

On pose : $M = B$ on aura :
$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



2°Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$
Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(4+1/2-3)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MA} + 1/2\,\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

On pose : $M = C$ on aura :
$\frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{8}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



Exercice 4 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB}$

1)montrer que G le barycentre de :
$\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G

Solution : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

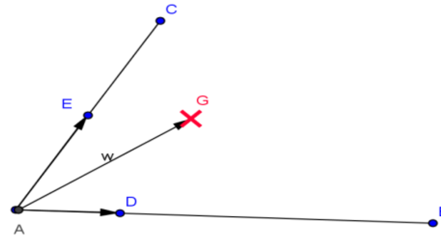
$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

On a :® $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$



Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan
et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

Propriété :
Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :
$Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) =$
$Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :
Soit $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ où $\alpha + \beta \neq 0$ et
$G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Montrer que $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Propriété :
Si $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$
et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Alors : $G = Bar\{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Exercice 5 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$

Solution : soit E = $Bar\{(A, 2); (B, -3)\}$
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$

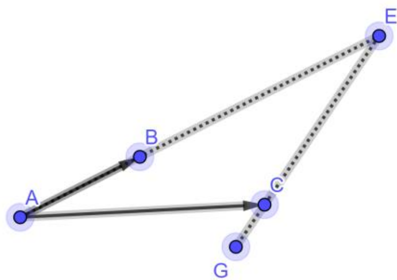
On pose : $M = A$ on aura : $-\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$

d'après la Propriété d'associativité on a :
G = $Bar\{(E, -1); (C, 5)\}$
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MC}$

On pose : $M=E$ on aura :

$4\overrightarrow{EG}=5\overrightarrow{EC}\Leftrightarrow \overrightarrow{EG}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$



Cas particulier

Si les poids α; β et γ sont égaux le barycentre de {(A, α); (B, α); (C, α)}

S'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$

Solution : G le centre de gravité du triangle ABC

Donc G est le barycentre de :

{(A, 1); (B, 1); (C, 1)}

I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le barycentre de : { (B, 1); (C, 1)}

D'après la Propriété d'associativité on a :

G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}

Exercice7 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M

2) soit K = Bar{(C, -3); (B, 1)} montrer que : $\vec{V}=2\overrightarrow{KA}$

3) soit G= Bar{(A, 2); (B, -1); (C, -3)} montrer que : Pour tout point M on a :

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$

4) en déduire l'ensemble des points M tel que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : 1)

$\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M

2)on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M=K$ on aura :

$2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Et on a : K = Bar{(C, -3); (B, 1)} donc : $\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

3) d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

$\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\|\Leftrightarrow 2GM=2KA\Leftrightarrow GM=KA$

Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r=KA$

Exercice 8 : Soit ABC un triangle tel que : $AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$

a) Construire G le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)}

b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : G est le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)} donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre

Donc G est le milieu du segment $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=AC\Leftrightarrow GM=\frac{AC}{4}=1.5$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=1.5cm$

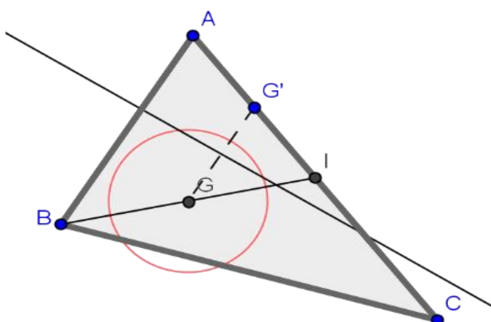
b) Soit G' est le barycentre de : {(A, 3); (C, 1)} Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M\in(P)$

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG'}$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow 4MG=4MG'\Leftrightarrow MG=MG'$

Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$

Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



5) Barycentre de quatre points pondérés

Propriété :
Soit {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ l'application :
$f_4 : P \to V_2$ tel que :
$f_4(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD}$
Est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_4(G) = \vec{0}$
c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$
Preuve : f_4 est l'application de Leibniz pour quatre points
Propriété :
Soit Σ = {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et
$G = Bar$ {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)}
si M est un point quelconque dans le plan (P)
on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC} + \frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$
où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.
Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$ des points du plan
$G = Bar$ {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)}
on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{s}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{s}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{s}\overrightarrow{OC} + \frac{\delta}{s}\overrightarrow{OC}$
Et donc on a les coordonnées de G :
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$
où $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
Propriété : Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre
Non nul : Bar {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} = Bar {(A, $k\alpha$); (B, $k\beta$); (C, $k\gamma$); (D, $k\delta$)}
pour $k \neq 0$
Propriété : Si $G = Bar$ {(A, α); (B, β); (C, γ); (D, δ)} avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$
Si $G' = Bar$ {(A, α); (B, β)}
et $G'' = Bar$ {(C, γ); (D, δ)}
Alors $G = Bar$ {(G', ($\alpha + \beta$)); (G'', $\gamma + \delta$)}
Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Exercice9 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ Et soit $G = Bar$ {(A, 1); (B, 2)}
1) Déterminer les coordonnées de K = Bar {(A, 2); (B, 3)}
2) Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC
3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K = \dfrac{-2+0}{5} == \dfrac{-2}{5} \\ y_K = \dfrac{2+6}{5} = \dfrac{8}{5} \end{cases}$ donc $K\left(-\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$
2) les coordonnées de L sont :
$$\begin{cases} x_L = \dfrac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \dfrac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \dfrac{1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \dfrac{1\times 1 + 1\times 2 + 1\times(-1)}{1+1+1} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$
Donc $L\left(0;\frac{2}{3}\right)$
$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2\times x_A + 3\times x_B + 1\times x_C + (-1)\times x_D}{5} = \dfrac{-2}{5} \\ y_G = \dfrac{2\times y_A + 3\times y_B + 1\times y_C + (-1)\times y_D}{5} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$
$G\left(-\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)$

Application : $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré {(A, −2) ; (B, 3) ; (C, 1) ; (D, 1)}
Cas particulier : Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de :
{(A, α) ; (B, α) ; (C, α) ; (D, δ)} s'appelle **le centre de gravité** du quadrilatère convexe $ABCD$
Exercice10 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe
Soit H le barycentre du système pondéré {(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }
Soit K le barycentre du système pondéré {(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}
1) Montrer que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E
2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) en déduire que $(AK)\parallel(DH)$

Solution :
1)on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$\overrightarrow{ME}=\frac{1}{4}\left(5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut Construire E

2) on a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)} et $5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)}

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}\right)$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système Pondéré {(D, -6); (E, 4) }
Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?
Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
Pour tout point M du plan (P) on a :

$-\overrightarrow{MK}=-3\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : $3\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$3\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MK}$

Donc : : $3\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{MH}-3\overrightarrow{MD}$

$3\overrightarrow{DH}=3\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MD}\right)$

Donc : $3\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MK}$

Donc : $(AK)\parallel(DH)$: Donc $3\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AK}$

Exercice11 : ABC un triangle
I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$
Et $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

a)Déterminer les coordonnées du point J
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)
c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a)on a : $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{CA}$

donc : $8\overrightarrow{AJ}=-7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$

donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc :

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times1-\frac{3}{2}\times0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times0-\frac{3}{2}\times1}{-1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ Donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ Donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

donc : $(IK): \frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$

$(IK): 15x-9y+21=0$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

on a : $(IK): 15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

par suite : $J\in(IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice12 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

- on a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

- on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

- on a : K le symétrique de A par rapport a C

Donc : $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$

Donc : $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$1\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K\in(IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice13: ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$ et M et N deux points tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1determiner le barycentre des points pondérés {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1)on a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

donc : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

De même on a : $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{ND}$

donc : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

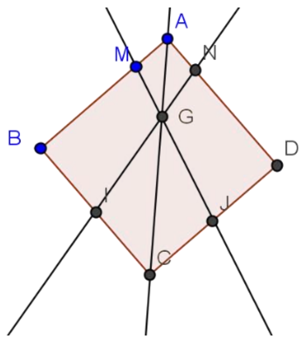
2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G\in(JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G\in(NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$ donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H\in[AC]$ donc $G\in(AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice14: A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$

1)montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;-3)$

a) Montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{MK}=0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution :1) $M\in(F)\Leftrightarrow \frac{MA}{MB}=3\Leftrightarrow MA=3MB$

$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)a)

$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)=0$

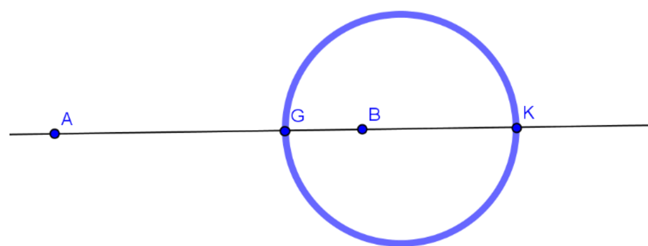
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MK}=0$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MK}=0$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice15: A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$

a)montrer que : $H\in(E)$

b)vérifier que : $M\in(E)\Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{AB}=0$

c)déterminer la nature de l'ensemble (E)

2)soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2-MB^2=8$

a) Montrer que : $\forall M\in(P)$ on a : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $(F)=(E)$ et le tracer

Solution :1)on a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH}\bullet\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}AB^2=4$

Donc $H\in(E)$

b) $M\in(E)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IH}\bullet\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IH}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{AB}=0$

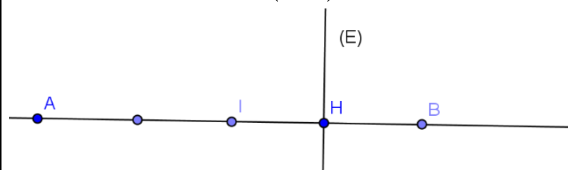
c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

2)a) $MA^2-MB^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

2)b) $M\in(F)\Leftrightarrow MA^2-MB^2=8\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow M\in(E)$

Donc $(F)=(E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Solution16 : A et B deux points tel que : $AB=3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$

a)monter que : $M\in(C)\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2)soit : (C') l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{-5}{4}$

a)Montrer que : $M\in(C')\Leftrightarrow MI=1$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution :1)on a :

$MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2MI^2+2IA^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$

Car : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$

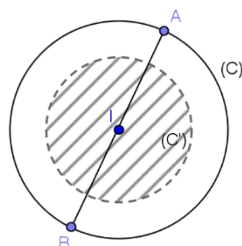
$M\in(C)\Leftrightarrow 2MI^2+\frac{AB^2}{2}=9\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$

b)en déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r=\frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

Donc : $M\in(C')\Leftrightarrow MI=1$

2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r=1$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

